Détermination du rayon de convergence d'une série entière via la règle de d'Alembert

On cherche à déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où (a_n) est une suite de nombres réels ou complexes en utilisant la règle de d'Alembert des séries numériques. Pour cela, on procède comme suit :

1. On pose $u_n = |a_n z^n|$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ et les valeurs de n telles que $u_n \neq 0$.
   ⚠ La valeur absolue / le module est indispensable.
2. On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en simplifiant au maximum.
3. On détermine la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'expression précédente.
4. On compare cette limite, qui dépend généralement de $|z|$, avec 1 pour conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$, on obtient ainsi le rayon de convergence de la série entière.

Exemple 1. Rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{5^n}{n+1} z^{2n}$.

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left|\dfrac{5^n}{n+1} z^{2n}\right| = \dfrac{5^n}{n+1}|z|^{2n}$.
2. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}|z|^{2(n+1)}}{n+2} \times \frac{n+1}{5^n|z|^{2n}} = \frac{n+1}{n+2} \times 5|z|^2.$$
3. Grâce au calcul précédent, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 5|z|^2$.
4.
   - Si $5|z|^2 < 1$ alors, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est convergente. Cela étant valable pour tout z tel que $5|z|^2 < 1$, *i.e.* $|z| < \frac{1}{\sqrt{5}}$, on obtient $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   - Si $5|z|^2 > 1$ alors, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est divergente. Cela étant valable pour tout z tel que $5|z|^2 > 1$, *i.e.* $|z| > \frac{1}{\sqrt{5}}$, on obtient $R \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   - Par double inégalité $\boxed{R = \frac{1}{\sqrt{5}}}$.

Exemple 2. Rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^n} z^n$.

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left|\dfrac{(-1)^n}{n^n} z^n\right| = \dfrac{|z|^n}{n^n}$.
2. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$
3. *Méthode 1* : On a $0 \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{|z|}{n+1}$ car $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \leqslant 1$ pour tout entier naturel n. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$, par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.
   Méthode 2 : On passe à la forme exponentielle :
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln \frac{n}{n+1}\right) = \exp\left(-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\overset{\mathrm{DL}}{=}} \mathrm{e}^{-1+o(1)}.$$
   D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1}\mathrm{e}^{-1+o(1)} = 0 \times \mathrm{e}^{-1} = 0$.
4. Comme $0 < 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge. Comme ceci est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$, on en déduit que $\boxed{R = +\infty}$.

Rappel : *règle de d'Alembert des séries numériques*
Soit $\sum u_n$ une série avec à termes strictement positifs.
On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et vaut ℓ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ est convergente ;
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente ;
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure concernant la nature de la série $\sum u_n$.